5 Määratud integraal

5.1 Määratud integraali mõiste

Olgu funktsioon $y = f(x)$ määratud lõigul $[a; b]$. Jaotame lõigu $[a; b]$ suvalisel viisil punktidega $x_1,\ x_2,\ \ldots x_{n-1}$ n osalõiguks, kusjuures

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Tekkinud osalõigud on $[x_{k-1}; x_k]$, kus $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Tähistagu $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ k-nda osalõigu pikkust.

Edasi valime igalt osalõigult täiesti suvalise punkti $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, ja moodustame korrutised $f(\xi_k)\Delta x_k$. Liites need korrutised, saame summa

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

mida nimetatakse funktsiooni $f(x)$ integraalsummaks lõigul $[a; b]$.

Jaotuspunktid $x_1,\ x_2,\ \ldots$ on suvalised. Seeaga on osalõikude pikkused Δx_k, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ erinevad. Tähistagu λ pikima osalõigu pikkust st

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k.$$

Definitsioon 1. Kui piirväärtus

$$\lim_{\lambda \to 0} s_n$$

ei sõltu sellest, kuidas on lõik $[a; b]$ jaotatud osalõikudeks $[x_{k-1}; x_k]$, ega sellest, kuidas on valitud punktid ξ_k osalõikudel, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(x)$ määratud integraaliks rajades a-st b-ni ja tähistatakse

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Seda loetakse: *integraal rajades a-st b-ni f kohal x de x.*

Seejuures integereerimislõigu alguspunkti a nimetatakse alumiseks rajaks ja lõigu lõpp-punkti b ülemiseks rajaks.

Seega definitsiooni kohaselt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Kui lõigul $[a;b]$ on $f(x) \geq 0$, siis integraalsummas esinevad korrutised $f(\xi_k)\Delta x_k$ on selliste ristkülikute pindaladeks, mille alused on Δx_k ja kõrgused $f(\xi_k)$. Selliste ristkülikute pindalade summa, st integraalsumma s_n on ligikaudu võrdne niisuguse kõvertrapetsi pindalaga, mis alt on piiratud x-teljega, vasakult sirgega $x = a$, paremalt sirgega $x = b$ ja ülalt funktsiooni $y = f(x)$ graafikuga.

Kui vaadelda piirprotsessi $\lambda \to 0$, siis kõikide osalõikude pikkused hakkavad kahanema ja selleks et osalõigud kataksid kogu lõigu $[a;b]$, tuleb võtta neid osalõike järjest rohkem. Ristkülikute pindalade summa s_n hakkab osalõikude arvu kasvades täpsemalt iseloomustama kõvertrapetsi pindala.

Seega, kui lõigul $[a;b]$ on $f(x) \geq 0$, *siis määratud integraal tähendab geomeetriliselt kõvertrapetsi pindala.*

Definitsioon 2. Funktsioone, mis rahuldavad definitsioonis 1 esitatud tingimusi, nimetatakse *lõigul* $[a;b]$ *integreeruvateks funktsioonideks.*

Kehtib teoreem.

Teoreem 1. Kui funktsioon $f(x)$ on pidev lõigul $[a;b]$, siis on see ka integreeruv lõigul $[a;b]$.

Märkus. Lõigul $[a;b]$ katkevate funktsioonide hulgas leidub nii integreeruvaid kui ka mitteintegreeruvaid.

5.2 Määratud integraali põhiomadused

Omadus 1 Kahe funktsiooni summa määratud integraal on võrdne nende funktsioonide määratud integraalide summaga:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \tag{5.1}$$

Tõestus Määratud integraali definitsiooni kohaselt

$$I = \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(\xi_k) + g(\xi_k)]\Delta x_k.$$

Avades summa märgi all sulud ja kasutades asjaolu, et summa ei sõltu liidetavate järjekorrast, saame

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \left[\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k \right].$$

Summa piirväärtus võrdub piirväärtuste summaga, seega

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k,$$

mille liidetavad on määratud integraali definitsiooni kohaselt vastavalt võrduse (5.1) paremal pool olevad integraalid.

Omadus 2. Konstantse teguri c saab tuua määratud integraali märgi alt välja:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Järeldus 1. Kahe funktsiooni vahe määratud integraal võrdub nende funktsioonide määratud integraalide vahega:

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

Tõestus tugineb kahele esimesele omadusele. Kirjutades $f(x)-g(x) = f(x)+(-1)g(x)$, saame

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b [f(x)+(-1)g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + (-1)\int_a^b g(x)dx,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Omadus 3. Kui $f(x) \geq 0$ lõigul $[a;b]$, siis ka

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Tõestus. Kui $f(x) \geq 0$ kogu lõigul $[a;b]$, siis on $f(x) \geq 0$ igal osalõigul $[x_{k-1};x_k]$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, seega ka $f(\xi_k) \geq 0$. Korrutades viimast võrratust k-nda osalõigu pikkusega, saame $f(\xi_k)\Delta x_k \geq 0$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Liites n mittenegatiivset suurust, saame mittenegatiivse suuruse st

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \geq 0.$$

Mittenegatiivse suuruse piirväärtus on piirprotsessis $\lambda \to 0$ mittenegatiivne suurus, mis tõestabki omaduse.

Järeldus 2. Kui lõigul $[a;b]$ $f(x) \leq g(x)$, siis

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Tõestus. Eelduse kohaselt $g(x)-f(x) \geq 0$, seega omadus 3 järgi

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]dx \geq 0.$$

Järelduse 1 põhjal

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0,$$

mis ongi väiteks.

Omadus 4. Funktsiooni $f(x)$ määratud integraali absoluutväärtus on väiksem või võrdne selle funktsiooni absoluutväärtuse määratud integraalist:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Tõestus. Määratud integraali definitsiooni kohaselt

$$I = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \right| = \lim_{\lambda \to 0} \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \right| \leq$$

$$\leq \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)\Delta x_k| = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|\Delta x_k = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Omadus 5. Kui vahetada määratud integraalis rajad, muutub märk integraali ees vastupidiseks:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Tõestus. Määratud integraali definitsioonis ei või piirväärtus sõltuda sellest, kuidas on antud lõik osalõikudeks jaotatud. Seega võime mõlema integraali definitsioonis valida samad jaotuspunktid ja kõikidel osalõikudel valida samad juhuslikud punktid ξ_k. Defineerides paremal asuvat määratud integraali st liikudes punktist a punkti b, on $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Defineerides vasakul asuvat määratud integraali st liikudes vastupidises suunas punktist b punkti a, on sama osalõigu "pikkus"$x_{k-1} - x_k = -\Delta x_k$. Seega on integraalsumma üle lõigu $[b; a]$

$$\sum_{[b;a]} f(\xi_k)(-\Delta x_k) = \sum_{k=n}^{1} f(\xi_k)(-\Delta x_k) = -\sum_{k=n}^{1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Summa ei sõltu liidetavate järjekorrast, seega

$$\sum_{[b;a]} f(\xi_k)(-\Delta x_k) = -\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

ja võttes saadud võrduse mõlemalt poolt piirväärtuse piirprotsessis $\lambda \to 0$, saame väite.

Järeldus 3. Kui määratud integraali alumine ja ülemine raja on võrdsed, võrdub integraal nulliga:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Tõestus. Vahetades integraalis rajad, saame omadus 5 põhjal

$$\int_a^a f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx$$

ehk

$$2\int_a^a f(x)dx = 0,$$

millest järeldubki väide.

Omadus 6 (Määratud integraali lõigul aditiivsuse omadus).

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Tõestus. Oletame esiteks, et c asub lõigul $[a; b]$, st $a < c < b$. Defineerides vasakul asuvat määratud integraali jaotame lõigu $[a; b]$ osalõikudeks, valides esimeseks jaotuspunktiks c. Seda võib teha, sest määratud integraali definitsioonis piirväärtus ei või sõltuda sellest, kuidas on lõik osalõikudeks jaotatud. Jätkates lõigu $[a; b]$ jaotamist suvalisel viisil, tekivad ka lõikude $[a; c]$ ja $[c; b]$ jaotused osalõikudeks. Seega integraalsumma üle kogu lõigu $[a; b]$

$$\sum_{[a;b]} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{[a;c]} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{[c;b]} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Kui lõigul $[a; b]$ maksimaalse osalõigu pikkus $\lambda \to 0$, siis mõlemal tekkinud lõigul maksimaalsete osalõikude pikkused lähenevad samuti nullile. Seega, võttes saadud võrduse mälemalt poolt piirväärtuse piirprotsessi $\lambda \to 0$, saame väite.

Kui c asub väljaspoollõiku $[a; b]$, näiteks $c > b > a$, siis tõestatud juhu põhjal

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Siit

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

ja omadus 5 põhjal pärast viimases integraalis rajade vahetamist

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Samuti saab näidata, et omadus jääb kehtima ka juhul $c < a$.

Omadus 7. Kui m on funktsiooni $f(x)$ vähim ja M funktsiooni $f(x)$ suurim väärtus lõigul $[a; b]$, siis

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

st määratud integraal jääb vähima väärtuse ja integreerimislõigu pikkuse korrutise ning suurima väärtuse ja integreerimislõigu pikkuse korrutise vahele.

Tõestus. Võrratuste tõestused on sarnased. Seepärast tõestame ainult parempoolse võrratuse.

Funktsiooni $f(x)$ suurim väärtus lõigul $[a; b]$ on M. Seega iga osalõikudel juhuslikult valitud punktis ξ_k on $f(\xi_k) \leq M$, st iga $k = 1, 2, \ldots, n$ korral $f(\xi_k)\Delta x_k \leq M\Delta x_k$. Summeerides saame, et

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M\Delta x_k =$$

$$= M(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \ \ldots \ + x_n - x_{n-1}) = M(b-a),$$

sest tähistuse kohaselt $x_0 = a$ ja $x_n = b$.

Võttes saadud võrratuse

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leq M(b-a)$$

mõlemalt poolt piirväärtuse piirprotsessis $\lambda \to 0$ ja arvestades sellega, et paremal pool on konstantne suurus, saame väite.

Omadus 8 (määratud integraali keskväärtuse omadus). Kui funktsioon $f(x)$ on pidev lõigul $[a; b]$, siis leidub vähemalt üks selline punkt $\xi \in [a; b]$, et

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Tõestus. Lõigul pidev funktsioon omab vähimat väärtust m ja suurimat väärtust M sellel lõigul, seega kehtib omadus 7. Jagades selle väites esineva mõlema võrratuse mõlemat poolt integreerimislõigu pikkusega $b - a$, saame

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Järelikult

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

on mingisugune väärtus vähima ja suurima väärtuse vahel. Lõigul $[a;b]$ pidev funktsioon aga omandab kõiki väärtusi vähima ja suurima väärtuse vahelt, muuhulgas ka seda väärtust. Seega leidub punkt $\xi \in [a;b]$, milles

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{5.2}$$

Korrutades saadud võrduse mõlemat poolt integreerimislõigu pikkusega $b-a$, saame väite.

Omadus 8 väites esinevat väärtust $f(\xi)$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *keskväärtuseks lõigul* $[a;b]$. Seda arvutatakse valemi (5.2) järgi.

5.3 Määratud integraali arvutamine. Newton-Leibnizi valem

Olgu funktsiooni $f(x)$ määratud lõigul $[a;b]$. Defineerime lõigul $[a;b]$ määratud integraali ülemise raja funktsiooni

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{5.3}$$

Teoreem 2. Kui $f(x)$ on pidev lõigul $[a;b]$, siis $\Phi'(x) = f(x)$.

Tõestus. Tõestuseks kasutame funktsiooni $\Phi(x)$ definitsiooni

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x}.$$

Kasutades määratud integraali lõigul aditiivsuse omadust leiame

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Eelduse kohaselt on $f(x)$ pidev lõigul $[a;b]$. Seega keskväärtus omaduse põhjal leidub selline $\xi \in [x; x+\Delta x]$, et

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x.$$

Sellest järeldub, et

$$\frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x}{\Delta x} = f(\xi).$$

Tuletise definitsioonis $\Delta x \to 0$. Järelikult $x + \Delta x \to x$ ja et ξ on üks punkt x ja $x + \Delta x$ vahelt, siis ka $\xi \to x$. Seega

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi)$$

ning funktsiooni $f(x)$ pidevuse tõttu $\Phi'(x) = f(x)$, mida oligi tarvis tõestada.

Teoreemi 2 põhjal on funktsioon $\Phi(x)$ funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooniks. Kui $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ tuntud algfunktsioon (määratud integraali tabeli järgi või mingi integreerimismeetodi abil saadud), siis punkti 4.1 lause 1.2 põhjal $\Phi(x)$ ja $F(x)$ erinevad teineteisest ülimalt konstandi võrra, st $\Phi(x) = F(x) + C$. Funktsiooni $\Phi(x)$ definitsiooni põhjal

$$F(x) + C = \int_a^x f(t)dt. \tag{5.4}$$

Võttes selles võrduses $x = a$, saame eelmise punkti järeldusest 3, et

$$F(a) + C = \int_a^a f(t)dt = 0,$$

millest $C = -F(a)$. Asendades selle võrdusesse (5.4), saame, et

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$$

ja võttes viimases võrduses $x = b$, tekib võrdus

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt. \tag{5.5}$$

Seega on määramata integraalist tuttav algfunktsioon sobiv vahend määratud integraali arvutamiseks ja saadud reegel on sõnastatav järgmiselt. Funktsiooni $f(x)$ määratud integraal rajades a-st b-ni on võrdne algfunktsiooni väärtuse kohal b ja algfunktsiooni väärtuse kohal a vahega. Arvutuste hõlbustamiseks kasutatakse kirjaviisi

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Asendades võrduses (5.5) integreerimismuutuja t muutujaga x, saame määratud integraali arvutamiseks valemi

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{5.6}$$

mis on tuntud Newton-Leibnizi valemi nime all.

Näide 1. Leiame

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$$

Näide 2. Leiame

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Kasutame integreerimiseks võrdust $d(1+x^2) = 2xdx$ ja leiame

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

Näide 3. Arvutame funktsiooni $f(x) = x^2$ keskväärtuse lõigul $[1; 3]$. Keskväärtuse arvutamise valemi (5.2) järgi leiame

$$\frac{1}{3-1}\int_1^3 x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}.$$

5.4 Muutuja vahetus määratud integraalis

Muutuja vahetuse valik sõltub integreeritavast funktsioonist ja need põhimõtted on määramata integraali korral läbi vaadatud.

Määratud integraali arvutamisel huvitab meid selle arvuline väärtus, mitte esialgse funktsiooni algfunktsioon. Seepärast ei minda määratud integraalis pärast muutuja vahetust enam tagasi vanale muutujale, vaid arvutatakse rajad uue muutuja jaoks.

Tehes määratud integraalis

$$\int_a^b f(x)dx$$

muutuja vahetuse $x = \varphi(t)$, leiame $dx = \varphi'(t)dt$, võrrandist $\varphi(t) = a$ uue muutuja jaoks alumise raja $t = \alpha$ ja võrrandist $\varphi(t) = b$ ülemise raja $t = \beta$. Siis

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[(\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Näide 4. Arvutame $I = \int_0^2 \sqrt{8-x^2}dx$. Irratsionaalsusest vabanemiseks teeme muutuja vahetuse $x = 2\sqrt{2}\sin t$. Siis $dx = 2\sqrt{2}\cos t dt$ ja

$$\sqrt{8-x^2} = \sqrt{8-8\sin^2 t} = \sqrt{8\cos^2 t} = 2\sqrt{2}\cos t.$$

Arvutame rajad uue muutuja t jaoks. Kui $x = 0$, siis $\sin t = 0$, millest $t = 0$. Kui $x = 2$, siis $2\sqrt{2}\sin t = 2$ ehk $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, millest $t = \frac{\pi}{4}$. Seega

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{2}\cos t \cdot 2\sqrt{2}\cos t dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2t)dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t d(2t) = \\ &= 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi + 2. \end{aligned}$$

5.5 Ositi integreerimine

Olgu $u(x)$ ja $v(x)$ lõigul $[a;b]$ diferentseeruvad funktsioonid. Sellisel juhul nende korrutise difrentsiaal

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Punkti 4.1. järelduse 1.6 põhjal on diferentsiaali $d(uv)$ üheks algfunktsiooniks uv. Integreerides viimast võrdust rajades a-st b-ni, saame

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b udv + \int_a^b vdu,$$

millest

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \tag{5.7}$$

Oleme saanud ositi integreerimise valemi määratud integraali arvutamiseks. Valemi kasutamisel on funktsiooni u ja diferentsiaali dv valiku põhimõtted samad, mis määramata integraali korral.

Näide 5. Leiame $\int_1^e \ln x dx$.

Valides siin $u = \ln x$ ja $dv = dx$, leiame $du = \frac{dx}{x}$ ja $v = x$ ning ositi integreerimise valemi (5.7) põhjal

$$\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x} = e - x\Big|_1^e = e - (e-1) = 1.$$

5.6 Lõpmatute rajadega päratud integraalid

Päratuid integraale on kahte tüüpi. Käesolevas punktis vaatleme lõpmatute rajadega päratuid integraale ja järgmises punktis päratuid integraale tõkestamata funktsioonidest.

Definitsioon 1. Olgu funktsioon $f(x)$ määratud ja pidev poollõigul $[a;\infty)$. Kui iga $N \in [a;\infty)$ korral on olemas määratud integraal $\displaystyle\int_a^N f(x)dx$ ja eksisteerib piirväärtus $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)dx$, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(x)$ lõpmatu ülemise rajaga päratuks integraaliks ja tähistatakse $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$.

Definitsiooni 1 kohaselt

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)dx. \tag{5.8}$$

Seega tuleb päratu integraali arvutamiseks leida kõigepealt funktsiooni $f(x)$ määratud integraal rajades a-st N-ni ja saadud avaldisest arvutada piirväärtus piirprotsessis $N \to \infty$.

Näide 6. Leiame $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.

Arvutusvalemi (5.8) järgi

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{N\to\infty} \arctan x\Big|_0^N = \lim_{N\to\infty}(\arctan N - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Definitsioon 2. Olgu funktsioon $f(x)$ määratud ja pidev poollõigul $(-\infty;b]$. Kui iga $M \in (-\infty;b]$ korral on olemas määratud integraal $\displaystyle\int_M^b f(x)dx$ ja eksisteerib piirväärtus $\displaystyle\lim_{M\to-\infty}\int_M^b f(x)dx$, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(x)$ lõpmatu alumise rajaga päratuks integraaliks ja tähistatakse $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)dx$.

Definitsiooni 2 järgi

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{M\to-\infty}\int_M^b f(x)dx. \tag{5.9}$$

Kui funktsioon $f(x)$ on määratud ja pidev vahemikus $(-\infty;\infty)$, siis mõlema lõpmatu rajaga päratu integraali defineerimisel jaotatakse integraal suvalises punktis $c \in (-\infty; \infty)$ kaheks,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx,$$

ning tekkinud liidetavatest esimene on lõpatu alumise rajaga päratu integraal ja teine lõpmatu ülemise rajaga päratu integraal.

Definitsioon 3. Kui võrdustes (5.8) või (5.9) esinev piirväärtus on lõplik, siis öeldakse, et *päratu integraal koondub*, kui piirväärtus on lõpmatu või piirväärtust ei ole olemas, siis öeldakse, et *päratu integraal hajub*.

Näide 7. Olgu $a > 0$. Uurime, milliste α väärtuste korral päratu integraal $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ koondub ja milliste väärtuste korral hajub.

Leiame

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{N\to\infty} \int_a^{N} \frac{dx}{x^{\alpha}}.$$

Kui $\alpha \neq 1$, siis

$$I = \lim_{N\to\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\bigg|_a^N = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{N^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right).$$

Kui $\alpha > 1$, siis

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{(1-\alpha)N^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)a^{\alpha-1}} \right) = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}},$$

st päratu integraal koondub. Kui $\alpha < 1$, siis

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{N^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{a^{1-\alpha}}{(1-\alpha)a^{\alpha-1}} \right) = \infty,$$

st päratu integraal hajub.

Kui $\alpha = 1$, siis

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty} \ln x \bigg|_a^N = \lim_{N\to\infty} (\ln N - \ln a) = \infty,$$

st ka antud juhul päratu integraal hajub.

Seega päratu integraal $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ koondub, kui $\alpha > 1$ ja hajub, kui $\alpha \leq 1$.

Paljudel juhtudel on vaja välja selgitada, kas päratu integraal koonub või hajub. Integraali tegelik väärtus seejuures ei olegi oluline. Koonduvuse või hajuvuse üle otsustamisel on abiks järgmised teoreemid. Sõnastame need lõpmatu ülemise rajaga päratu integraali korral, aga kehtima jäävad need ka lõpmatu alumise rajaga ja mõlema lõpmatu rajaga päratu integraali puhul.

Teoreem 3. Kui poollõigul $[a;\infty)$ määratud ja pidevad funktioonid $f(x)$ ja $\varphi(x)$ rahuldavad tingimust $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ ja päratu integraal

$$\int_a^\infty \varphi(x)dx \tag{5.10}$$

koondub, siis koondub ka päratu integraal

$$\int_a^\infty f(x)dx. \tag{5.11}$$

Kui poollõigul $[a;\infty)$ määratud ja pidevad funktioonid $f(x)$ ja $\varphi(x)$ rahuldavad tingimust $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ ja päratu integraal (5.10) hajub, siis hajub ka päratu integraal (5.11).

Teoreem 4. Kui poollõigul $[a;\infty)$ määratud ja pidevad funktioonid $f(x)$ ja $\varphi(x)$ on piiprotsessis $x \to \infty$ ekvivalentsed, siis päratu integraali (5.10) koonduvusest järeldub päratu integraali (5.11) koonduvus ja päratu integraali (5.10) hajuvusest päratu integraali (5.11) hajuvus.

Definitsioon 4. Pärartut integraali (5.11) nimetatakse *absoluutselt koonduvaks*, kui koondub päratu integraal

$$\int_a^\infty |f(x)|dx.$$

Teoreem 5. Päratu integraali (5.11) absoluutsest koonduvusest järeldub selle koonduvus.

Näide 8. Uurime päratu integraali

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x dx}{1+x^2}$$

koonduvust.

Poollõigul $[0;\infty)$ on täidetud tingimus $\arctan x \le \dfrac{\pi}{2}$. Näite 6 põhjal päratu integraal $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ koondub. Võttes teoreemis 3 $f(x) = \dfrac{\arctan x}{1+x^2}$ ja $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$ saame, et antud päratu integraal koondub.

Näide 9. Uurime päratu integraali $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x-1}$ koonduvust.

Piirprotsessis $x \to \infty$ on funktsioonid $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ja $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ ekvivalentsed, sest

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

Näite 7 põhjal päratu integraal $\int_2^\infty \frac{dx}{x}$ hajub. Seega teoreemi 4 põhjal hajub ka antud päratu integraal.

Näide 10. Uurime päratu integraali $\int_1^\infty \frac{\sin x dx}{x^2}$ koonduvust.

Iga $x \in \mathbb{R}$ korral on täisetud tingimus $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$. Näite 7 põhjal päratu integraal $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$ koondub. Teoreemi 3 põhjal antud päratu integraal koondub absoluutselt ja teoreemist 5 järeldame, et antud päratu integraal koondub.

5.7 Päratud integraalid tõkestamata funktsioonidest

Olgu funktsioon $f(x)$ tõkestamata lõigu $[a;b]$ lõpp-punkti b ümbruses.

Definitsioon 5. Kui iga $\varepsilon > 0$ korral on olemas määratud integraal $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ ja eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, siis seda piirväärtust nimetatakse päratuks integraaliks tõkestamata funktsioonist ülemise raja ümbruses ja tähistatakse $\int_a^b f(x)dx$.

Definitsiooni 5 kohaselt päratu integraal tõkestamata funktsioonist ülemise raja b ümbruses arvutatakse valemi

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \tag{5.12}$$

abil.

Nagu näha, on päratu integraali tõkestamata funktsioonist oma kirjapildilt täpselt samasugune, nagu määratud integraal. Asjaolu, et integreeritav funktsioon on tõkestamata mingisuguse lõigus asuva punkti ümbruses, tuleb igaühel endal ära taibata.

Olgu funktsioon $f(x)$ tõkestamata lõigu $[a;b]$ alguspunkti a ümbruses.

Definitsioon 6. Kui iga $\varepsilon > 0$ korral on olemas määratud integraal $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ ja eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, siis seda piirväärtust nimetatakse päratuks integraaliks tõkestamata funktsioonist alumise raja ümbruses ja tähistatakse $\int_a^b f(x)dx$.

Definitsiooni 6 kohaselt päratu integraal tõkestamata funktsioonist alumise raja a ümbruses arvutatakse valemi

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \tag{5.13}$$

abil.

Kui funktsioon $f(x)$ on tõkestamata lõigu $[a; b]$ sisepunktis c, siis kasutades määratud integraali lõigul aditiivsuse omadust, kirjutame

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ja tekkinud summas on liidetavad juba defineeritud tüüpi päratud integraalid.

Kui arvutusvalemites (5.12) ja (5.13) olevad piirväärtused on lõplikud, siis öeldakse, et *päratu integraal koondub*, kui aga need piirväärtused on lõpmatud või neid ei ole olemas, siis öeldakse, et *päratu integraal hajub*.

Definitsioon 7. Päratut integraali nimetatakse absoluutselt koonduvaks, kui koondub päratu integraal

$$\int_a^b |f(x)|dx.$$

Näide 11. Uurime, kuidas sõltub päratu integraali

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \tag{5.14}$$

koonduvus või hajuvus astendajast α.

Integreeritav funktsioon $\dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$ on tõkestamata ülemise raja b ümbruses. Seega valemi (5.12) järgi

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}.$$

Oletame, et $\alpha \neq 1$. Kasutades diferentsiaali märgi alla viimist saame, et

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} &= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} (b-x)^{-\alpha} d(b-x) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(b-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_a^{b-\varepsilon} = \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{\varepsilon^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]. \end{aligned}$$

Kui $\alpha > 1$, siis $\alpha - 1 > 0$ ja $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\alpha-1} = 0$, seega

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha-1}} = \infty,$$

st päratu integraal hajub.

Kui $\alpha < 1$, siis $1-\alpha > 0$ ja $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{1-\alpha} = 0$, seega

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

st päratu integraal koondub.

Kui $\alpha = 1$, siis

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)^\alpha} &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{d(b-x)}{b-x} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|b-x|\Big|_a^{b-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln|b-a| - \ln|\varepsilon|) = \infty,\end{aligned}$$

st ka antud juhul päratu integraal hajub.

Järelikult päratu integraal (5.14) koondub, kui $\alpha < 1$ja hajub, kui $\alpha \geq 1$.

Päratute integraalide tõkestamata funktsioonidest korral kehtivad eelmises punktis sõnastatud teoraamidega analoogilised teoreemid.

Teoreem 3'. Kui poollõigul $[a; b)$ määratud ja pidevad funktioonid $f(x)$ ja $\varphi(x)$ rahuldavad tingimust $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ ja päratu integraal

$$\int_a^b \varphi(x)dx \tag{5.15}$$

koondub, siis koondub ka päratu integraal

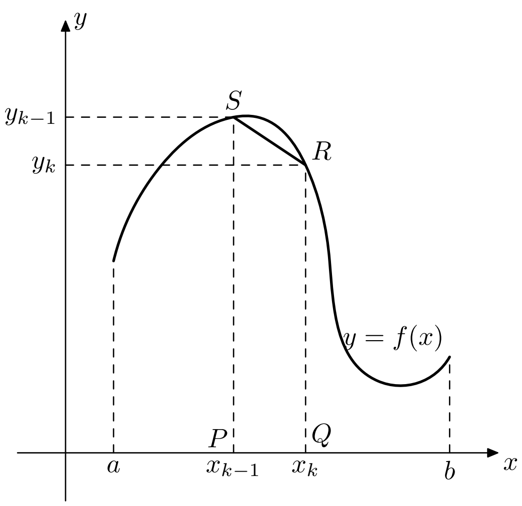
$$\int_a^b f(x)dx. \tag{5.16}$$

Teoreem 4'. Kui poollõigul $[a; b)$ määratud ja pidevad funktioonid $f(x)$ ja $\varphi(x)$ on piiprotsessis $x \to b$ ekvivalentsed, siis päratu integraali (5.15) koonduvusest järeldub päratu integraali (5.16) koonduvus ja päratu integraali (5.15) hajuvusest päratu integraali (5.16) hajuvus.

Teoreem 5'. Päratu integraali (5.16) absoluutsest koonduvusest järeldub selle koonduvus.

5.8 Määratud integraali ligikaudne arvutamine

Newton-Leibnizi valemi kasutamine määratud integraali arvutamiseks nõuab integreeritava funktsiooni algfunktsiooni leidmist. On aga suhteliselt lihtsaid funktsioone, näiteks e^{-x^2}, $\frac{\sin x}{x}$ ja $\frac{1}{\ln x}$, millel elementaarfunktsioonide hulgas algfunktsioon puudub ja Newton-Leibnizi



valem ei ole rakendatav. Sellisel puhul kasutatakse määratud integraali arvutamiseks ligikaudseid meetodeid. Vaatleme käesolevas punktis neist ühte, nn *trapetsvalemit*.

Trapetsvalemi tuletamiseks jaotame integreerimislõigu $[a; b]$ n võrdse pikkusega osalõiguks. Ühe osalõigu pikkus on sellisel juhul $h = \dfrac{b-a}{n}$. Tähistame jaotuspunktid $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, ..., $x_k = a + kh$, ..., $x_n = a + nh = b$ ja arvutame nendes jaotuspunktides funktsiooni väärtused $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ..., $y_k = f(x_k)$, ..., $y_n = f(x_n)$.

Vertikaalsed sirged $x = x_k$, $k = 1, 2, ..., n-1$ jaotavad kõvertrapetsi $abBA$ n kõvertrapetsiks $PQRS$. Ühendame punktid R ja S sirgega, mille tulemusena tekib trapets $PQRS$, mille aluste PS ja QR pikkused on vastavalt y_{k-1} ja y_k ning kõrguseks ühe osalõigu pikkus h. Selle trapetsi pindala

$$S_k = \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \cdot h.$$

Trapetseid $PQRS$ on n tükki ja nende pindalade summa iseloomustab ligikaudu kõvertrapetsi $abBA$ pindala. On ilmne, et trapetsite pindalade summa iseloomustab kõvertrapetsi pindala seda täpsemalt, mida suurem on n, st mida suuremaks hulgaks osalõikudeks on jagatud lõik $[a; b]$. Kõvertrapetsi pindala on aga määratud integraali geomeetriliseks tähenduseks. Seega on määratud integraal ligikaudu võrdne trapetsite $PQRS$ pindalade summaga, st

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h.$$

Võttes $\frac{h}{2}$ sulgude ette, saame ligikaudse valemi

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n), \tag{5.17}$$

mida nimetatkse *trapetsvalemiks*. Paneme tähele, et saadud valemis kõik funktsiooni väärtused esinevad kahekordselt, va funtsiooni väärtused integreerimislõigu otspunktides $y_0 = f(a)$ ja $y_n = f(b)$.

Näide 12. Arvutame trapetsvalemi abil $\int_0^2 x^2dx$.

Näide on valitud nii, et seda integraali oleks võimalik ka täpselt arvutada ja trapetsvalemi abil saadud tulemustega võrrelda. Newton-Leibnizi valemi järgi $\int_0^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} = 2,(6)$.

Arvutame sama integraali trapetsvalemi abil, jagades integreerimislõigu $[0;2]$ neljaks osalõiguks, st võttes $n = 4$. Siis ühe osalõigu pikkus $h = \frac{2-0}{4} = 0,5$ ja jaotuspunktideks on punktid $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1,5$ ja $x_4 = 2$.

Arvutame jaotuspunktides funktsiooni $f(x) = x^2$ väärtused $y_0 = 0$, $y_1 = 0,25$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2,25$ ja $y_4 = 4$. Trapetsvalemi (5.17) põhjal

$$\int_0^2 x^2dx \approx 0,25(0 + 2 \cdot 0,25 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2,25 + 4) = 2,75.$$

Arvutame sama integraali trapetsvalemi abil, jagades integreerimislõigu $[0;2]$ kaheksaks osalõiguks. Siis ühe osalõigu pikkus on $h = 0,25$ ja jaotuspunktid on $x_0 = 0$, $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$, $x_3 = 0,75$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1,25$, $x_6 = 1,5$, $x_7 = 1,75$ ja $x_8 = 2$.

Funktsiooni $f(x) = x^2$ väärtused jaotuspunktides $y_0 = 0$, $y_1 = 0,0625$, $y_2 = 0,25$, $y_3 = 0,5625$, $y_4 = 1$, $y_5 = 1,5625$, $y_6 = 2,25$, $y_7 = 3,0625$ ja $y_8 = 4$. Trapetsvalemi (5.17) järgi

$$\int_0^2 x^2dx \approx 0,125(0+2\cdot0,0625+2\cdot0,25+2\cdot0,5625+2\cdot1+2\cdot1,5625+2\cdot2,25+2\cdot3,0625+4) = 2,6875.$$